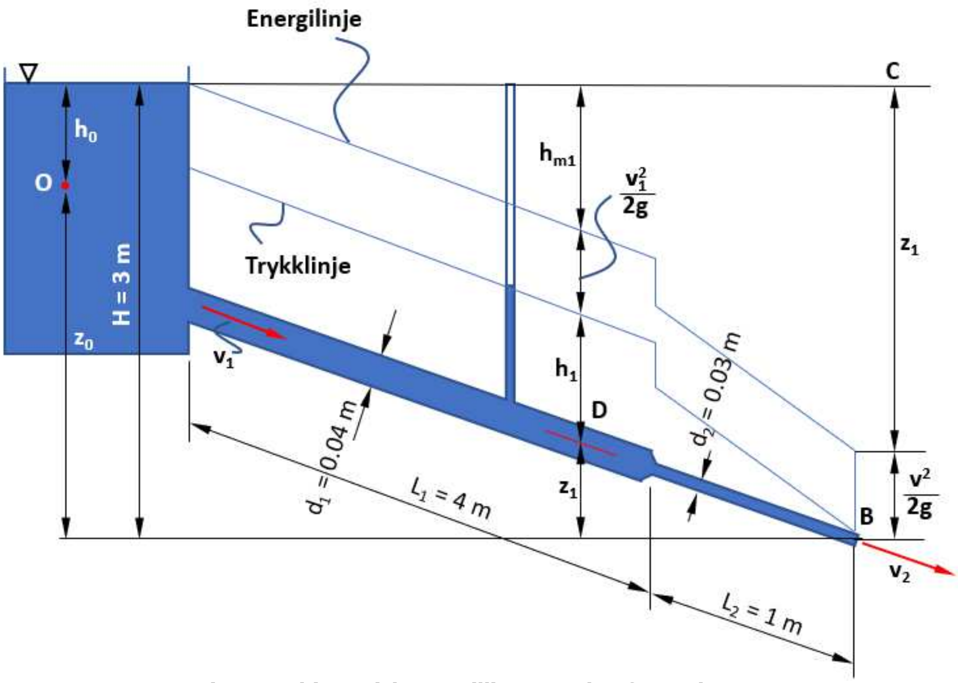
Eksempel 1: Avløpsrør

Figur 1 viser skjematisk en åpen vannbeholder A med en avløpsledning som har fritt utløp ved B. Karakteristiske mål er angitt på figuren. Det forutsettes at tapskoeffesienter er kartlagt:

For innløpet til avløpsrøret:	$C_1 := 0.5$	
For overgang mellom rør 1 og det tynnere røret 2:	$C_2 := 0.2$	
Motstandstallet / friksjonstallet i rørene:	$\lambda := 0.030$	
Indre diameter, rør 1:	$d_1 := 40\ mm$	$d_1 = 0.04\ m$
Indre diameter, rør 2:	$d_2 := 30\ mm$	$d_2 = 0.03\ m$
Lengde, rør 1:	$L_1 := 4\ m$	
Lengde, rør 1:	$L_2 := 1\ m$	
En vannpartikkels totale energi i tank:	$H := 3\ m$	

Det skal beregnes:

- Utløpshastigheten v_2
- Utløpsvolumet Q pr. tidsenhet



Figur 1. Skjematisk oppstilling av avløp fra tank.

Det tas utgangspunkt i en vannpartikkel som beveger seg gjennom rørledningen, pkt. O.

$$z_1 + h_1 + \frac{v_1^2}{2\ g} = z_2 + h_2 + \frac{v_2^2}{2\ g} + \Sigma\ \frac{v_i^2}{2\ g}$$

$$\Sigma \frac{v_i^2}{2g} = T_{ap} = C_1 \cdot \frac{v_1^2}{2g} + C_2 \cdot \frac{v_2^2}{2g} + \lambda \cdot \frac{L_1}{d_1} \cdot \frac{v_1^2}{2g} + \lambda \cdot \frac{L_2}{d_2} \cdot \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\Sigma \frac{v_i^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} \left(C_1 + \lambda \cdot \frac{L_1}{d_1}\right) + \frac{v_2^2}{2g} \left(C_2 + \lambda \cdot \frac{L_2}{d_2}\right)$$

$$\lambda \cdot \frac{L_1}{d_1} = 3 \qquad\qquad \lambda \cdot \frac{L_2}{d_2} = 1$$

Kontinuitetslikningen sier at: $Q_1 = Q_2 = v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$

Rørøarealene er hhv.: $A_1 := \frac{\pi}{4} d_1^2$ og $A_2 := \frac{\pi}{4} d_2^2$

Har da at: $v_1 \cdot \frac{\pi}{4} d_1^2 = v_2 \cdot \frac{\pi}{4} d_2^2$ eller $v_1 \cdot d_1^2 = v_2 \cdot d_2^2$

Hastighetene uttrykt ved hverandre: $v_2 = v_1 \cdot \frac{d_1^2}{d_2^2}$ eller $v_1 = v_2 \cdot \frac{d_2^2}{d_1^2}$

Tapene gjennom systemet kan uttrykkes som:

$$\Sigma \frac{v_i^2}{2g} = \frac{\left(v_2 \cdot \frac{d_2^2}{d_1^2}\right)^2}{2g} \left(C_1 + \lambda \cdot \frac{L_1}{d_1}\right) + \frac{v_2^2}{2g} \left(C_2 + \lambda \cdot \frac{L_2}{d_2}\right)$$

$$\Sigma \frac{v_i^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} \cdot \left(\frac{d_2^2}{d_1^2}\right)^2 \left(C_1 + \lambda \cdot \frac{L_1}{d_1}\right) + \frac{v_2^2}{2g} \left(C_2 + \lambda \cdot \frac{L_2}{d_2}\right)$$

$$\Sigma \frac{v_i^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} \left(\left(\frac{d_2^2}{d_1^2}\right)^2 \left(C_1 + \lambda \cdot \frac{L_1}{d_1}\right) + \left(C_2 + \lambda \cdot \frac{L_2}{d_2}\right)\right) = \frac{v_2^2}{2g} \cdot k_t$$

Der k_t er summen av tapsleddene: $k_t := \left(\frac{d_2^2}{d_1^2}\right)^2 \left(C_1 + \lambda \cdot \frac{L_1}{d_1}\right) + \left(C_2 + \lambda \cdot \frac{L_2}{d_2}\right)$

Da oppnås: $z_1 + h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + h_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{v_2^2}{2g} \cdot k_t$

En væskepartikkel hvor som helst i rør 1 intet begrep hvor i tanken den kommer i fra. Det betyr dermed at vannpartikkelen ved inngangen til rør 1 må ha den samme energien som en vannpartikkel hvor som helst i tanken i.e. $H = z_1 + h_1$ (i tanken). Etter hvert som vannpartikkelen fraktes nedover i rør 1 så vil den oppnå hastighet samt tape energi i form av friksjon mot innsiden av røret.

For en vannpartikkel i rør 1 må summen av stedshøyden, trykkhøyden, hastighetshøyden og tapshøyden være lik H. Har da at:

$$H = 0 + 0 + \frac{{v_2}^2}{2\ g} + \frac{{v_2}^2}{2\ g} \cdot k_t$$

$$H = \frac{{v_2}^2}{2\ g} + \frac{{v_2}^2}{2\ g} \cdot k_t = \frac{{v_2}^2}{2\ g}\ \left(1 + k_t\right)$$

Vannhastigheten ved utgangen av rør 2, er da: $v_2 := \sqrt{\frac{(2\ g) \cdot H}{\left(1 + k_t\right)}} = 4.2\ \frac{m}{s}$

Vannhastigheten i rør 1, er: $v_1 := v_2 \cdot \frac{{d_2}^2}{{d_1}^2} = 2.4\ \frac{m}{s}$

Strømningsmengdene, i begge rør: $Q := v_2 \cdot A_2 = 10.7\ \frac{m^3}{hr}$

Litt ekstra: Utregning av trykkhøyden i punkt D

Vannpartikkelen som nå har kommet til punkt D har nå fått hastighetsenergi i forhold til hva den hadde ved inngangen til rør 1. Den har imidlertid også tapt energi i form av friksjon. Tilsammen vil likningen for en vannpartikkel i punkt D, være:

$$z_D + h_D + \frac{{v_D}^2}{2\ g} + \frac{{v_D}^2}{2\ g} \cdot \left(C_1 + \lambda \cdot \frac{L_1}{d_1}\right) = H$$

Punktet D ligger hhv. $z_D := 0.55\ m$ høyt og $L_D := 3\ m$ i fra tanken eller inngangen på rør 1.

$$z_D + h_D + \frac{{v_D}^2}{2\ g} + \frac{{v_D}^2}{2\ g} \cdot \left(C_1 + \lambda \cdot \frac{L_D}{d_1}\right) = H$$

$$h_D = H - \left(\frac{{v_D}^2}{2\ g}\ \left(1 + \left(C_1 + \lambda \cdot \frac{L_D}{d_1}\right)\right) + z_D\right)$$

Og siden hastigheten i punkt må være den samme som for en vannpartikkel ellers i rør 1, så må $v_D := v_1$.

$$h_D := H - \left(\frac{{v_D}^2}{2\ g}\ \left(1 + \left(C_1 + \lambda \cdot \frac{L_D}{d_1}\right)\right) + z_D\right) = 1.37\ m$$