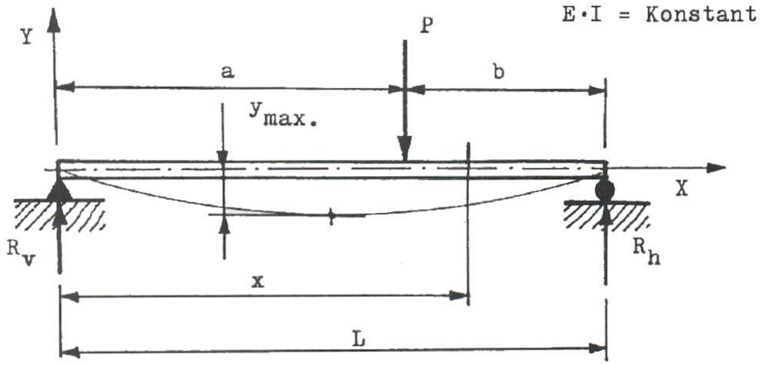
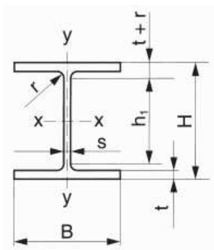
Eksempel 1: Fritt opplagret bjelke - Macaulay's betegnelser

Fritt opplagret bjelke. Fastholdt i den ene ende - diletasjon i den andre. Ved bruk av Macauleys betegnelser skal vi finne bjelkens vinkel ρ ved x og tilsvarende, nedbøyningen y ved x.



Figur E101. HEB 500 - bjelke med punktlast.

Følgende data er gitt om bjelken samt om belastning:



Bjelkens total lengde: $L := 10\ m$

Bjelkens arealtreghets moment: $I := 107200\ cm^4$, om x-aksen

Elastisitetsmodul / Young modulus: $E := 2.05 \cdot 10^5\ MPa$

Avstand 1: $a := 4\ m$

Avstand 2: $b := L - a = 6\ m$

Avstand 3: $x := 6.5\ m$

Uttrykket $x - a > 0$ i.e. $x - a = 2.5\ m$, så $betingelse = \text{“er oppfylt”}$

Belastning (punktlast): $P := 35 \cdot kN$

Det følgende er nyttig hvis man ikke har noe oppslagsverk eller husker det spesifikke uttrykket for nedbøyning av bjelken slik den er arrangert (fritt opplagret, holdt fast i én ende, diletasjon i den andre og punktlast). Man settet opp uttrykket og integrerer samme likning to ganger.

Finner først opplagerkreftene:

$$M_A = 0 \therefore \quad -R_h L + P a = 0 \quad => \quad R_h := \frac{P \cdot a}{L} = 14\ kN$$

$$M_B = 0 \therefore \quad R_v L - P b = 0 \quad => \quad R_v := \frac{P \cdot b}{L} = 21\ kN$$

Videre finnes momentet om x på bjelken: $M_x = 0 \therefore\ R_v\ x - P(x-a)$

En vet at $\dfrac{M_x}{EI} = \dfrac{d^2}{dx^2}y^2$. Med uttrykket for M_x innsatt oppnås,

$$EI\ \frac{d^2}{dx^2}y^2 = R_v\ x - P(x-a) \quad (1)$$

Videre, med R_v innsatt oppnås,

$$EI\ \frac{d^2}{dx^2}y^2 = \frac{P\cdot b}{L}\ x - P(x-a) \quad (2)$$

Integrerer først (1):

$$\int\left(\frac{P\cdot b}{L}\ x - P(x-a)\right)dx = \int\frac{P\cdot b}{L}\ x\,dx - \int P(x-a)\,dx = \frac{P\cdot b}{2\cdot L}\cdot x^2 - \frac{P}{2}\ (x-a)^2 + A$$

Deretter (2):

$$\int\left(\frac{P\cdot b}{2\cdot L}\cdot x^2 - \frac{P}{2}\ (x-a)^2 + A\right)dx = \frac{P\cdot b}{6\cdot L}\cdot x^3 - \frac{P}{6}\ (x-a)^3 + A\cdot x + B$$

Integrasjonsbetingelsene er som følger, $x=0$ idet $y=0$ og $x=L$ idet $y=0$.

Ut i fra den første betingelsen, $EIy(0)=0$, får vi $\dfrac{P\cdot b}{6\cdot L}\cdot 0^3 - \dfrac{P}{6}\ (0-a)^3 + A\cdot x + B = 0$ Noe som gir integrasjonskonstanten $B=0$.

Ut i fra den andre betingelsen, $EIy(L)=0$, får vi $\dfrac{P\cdot b}{6\cdot L}\cdot L^3 - \dfrac{P}{6}\ (L-a)^3 + A\cdot L + 0 = 0$ eller som $\dfrac{P\cdot b}{6\cdot L}\cdot L^3 - \dfrac{P}{6}\ b^3 + A\cdot L + 0 = \dfrac{P\cdot b}{6}\cdot\left(L^2 - b^2\right) + A\cdot L = 0$, hvilket gir integrasjonskonstanten $A = -\dfrac{P\cdot b}{6\cdot L}\cdot\left(L^2-b^2\right) = \dfrac{P\cdot b}{6\cdot L}\ \left(b^2 - L^2\right)$

Setter inn for A samt resten av verdiene over, og får:

$\dfrac{d}{dx}y = \rho$ i.e. $\rho := \left(\dfrac{P\cdot b}{2\cdot L}\cdot x^2 - \dfrac{P}{2}\ (x-a)^2 + \dfrac{P\cdot b}{6\cdot L}\ \left(b^2 - L^2\right)\right)\cdot(E\cdot I)^{-1} = 0.029\ deg$

og $y := \left(\dfrac{P\cdot b}{6\cdot L}\cdot x^3 - \dfrac{P}{6}\ (x-a)^3 + \left(\dfrac{P\cdot b}{6\cdot L}\ \left(b^2 - L^2\right)\right)\cdot x\right)\cdot(E\cdot I)^{-1} = -2.7\ mm$

Maksimal nedbøyning er $y_{max} = -3.15\ mm$ ved $x_{ymax} = 4.71\ m$ fra venstre side.

Merk: Man kan alltids diskutere om ikke også massen eller vekten av selve bjelken burde vært implementert i beregningen av vinkel og nedbøyning da den har en betydelig masse pr. lengdeenhet i.e. q *.*

Tre (3) betingelser for bruk av Macauleys betegelser:

- Parentesen skal IKKE løses opp, men benyttes i matematikken slik den står.
- Verdien av x skal ALLTID være forbi siste last på bjelken.
- Hvis man søker x et sted FØR siste eller nest siste last for den sakens skyld, så vil det bety at parentesen(e) er negativ(e) for x. I så fall skal den eller de ikke tas med i utregningen. Den eller de leddene skal sløyfes!
- Har parentesen verdien 0 for x så skal den heller ikke tas med i utregningen selv om det er en logisk konsekvens. Den eller de leddene skal sløyfes!