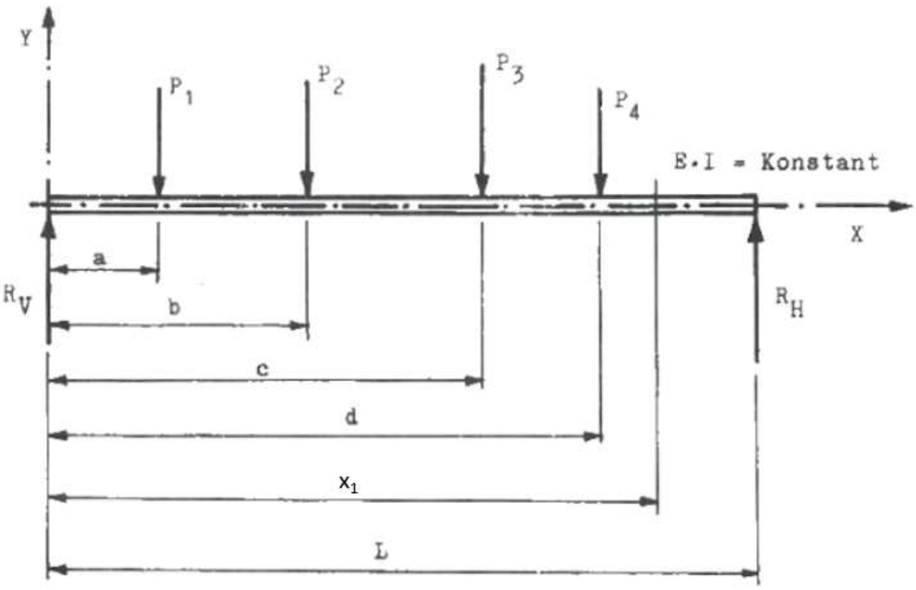
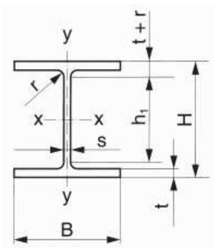
## Eksempel 2: Fritt opplagret bjelke - Macaulay's betegnelser

Fritt opplagret bjelke - i begge ender, men det kunne selvfølgelig vært diletasjon i en av endene. Ved bruk av Macauleys betegnelser skal vi finne bjelkens vinkel $\rho$ ved $x$ og tilsvarende, nedbøyningene $y_1$ ved $x_1$ og $y_2$ ved $x_2$ i.e. 2 deler.




*Figur E201. HEB 500 - bjelke med flere punktlaster. x om bakerste last.*

Følgende data er gitt om bjelken samt om belastning:




Bjelkens total lengde: $L := 10\ m$

Bjelkens arealtreghets moment: $I := 107200\ cm^4$ , om x-aksen

Elastisitetsmodul / Young modulus: $E := 2.05 \cdot 10^5\ MPa$

Avstand 1: $a := 2\ m$ Belastning (punktlast): $P_1 := 5 \cdot kN$

Avstand 2: $b := 4\ m$ Belastning (punktlast): $P_2 := 10 \cdot kN$

Avstand 3: $c := 6\ m$ Belastning (punktlast): $P_3 := 10 \cdot kN$

Avstand 4: $d := 8\ m$ Belastning (punktlast): $P_4 := 5 \cdot kN$

Finner først opplagerkreftene:

$$M_A = 0 \therefore \ -R_H L + P_1 a + P_2 b + P_3 c + P_4 d = 0$$

$$=> \quad R_H := \frac{P_1 \cdot a + P_2 \cdot b + P_3 \cdot c + P_4 \cdot d}{L} = 15\ kN$$

$$M_B = 0 \;\therefore\quad R_V L - \left(P_1\left(L-a\right)+P_2\left(L-b\right)+P_3\left(L-c\right)+P_4\left(L-d\right)\right) = 0$$

$$=> \qquad R_V := \frac{P_1 \cdot (L-a)+P_2 \cdot (L-b)+P_3 \cdot (L-c)+P_4 \cdot (L-d)}{L} = 15\ kN$$

Del 1: Punktet $x_1 := 8.5\ m$ om alle 4 lastene

---

Uttrykket $x-a>0$ i.e. $x_1-d=0.5\ m$, så $betingelse = \text{“er oppfylt”}$

Videre finnes momentet om punktet $x_1$ på bjelken,

$$M_{x1} = 0 \;\therefore\quad R_V\ x_1 - P_1\left(x_1-a\right) - P_2\left(x_1-b\right) - P_3\left(x_1-c\right) - P_4\left(x_1-d\right) = 0$$

En vet at $\frac{M_{x1}}{EI} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y^2$ . Med uttrykket for $M_{x1}$ innsatt oppnås,

$$EI\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y^2 = R_V\ x_1 - P_1\left(x_1-a\right) - P_2\left(x_1-b\right) - P_3\left(x_1-c\right) - P_4\left(x_1-d\right) \qquad (1)$$

Integrerer først (1):

$$\int \left(R_V\ x_1 - P_1\left(x_1-a\right) - P_2\left(x_1-b\right) - P_3\left(x_1-c\right) - P_4\left(x_1-d\right)\right) \mathrm{d}x$$

$$\frac{R_V}{2}\ {x_1}^2 - \frac{P_1}{2} \cdot \left(x_1-a\right)^2 - \frac{P_2}{2} \cdot \left(x_1-b\right)^2 - \frac{P_3}{2} \cdot \left(x_1-c\right)^2 - \frac{P_4}{2} \cdot \left(x_1-d\right)^2 + A_1 \qquad (2)$$

Deretter (2):

$$\int \left(\frac{R_V}{2}\ {x_1}^2 - \frac{P_1}{2} \cdot \left(x_1-a\right)^2 - \frac{P_2}{2} \cdot \left(x_1-b\right)^2 - \frac{P_3}{2} \cdot \left(x_1-c\right)^2 - \frac{P_4}{2} \cdot \left(x_1-d\right)^2 + A_1\right) \mathrm{d}x$$

$$\frac{R_V}{6}\ {x_1}^3 - \frac{P_1}{6} \cdot \left(x_1-a\right)^3 - \frac{P_2}{6} \cdot \left(x_1-b\right)^3 - \frac{P_3}{6} \cdot \left(x_1-c\right)^3 - \frac{P_4}{6} \cdot \left(x_1-d\right)^3 + A_1 \cdot x_1 + B_1 \qquad (3)$$

Integrasjonsbetingelsene er som følger, $x_1 = 0$ idet $y = 0$ og $x_1 = L$ idet $y = 0$.

Ser at ved $x_1 = 0$ og $y = 0$ så er $B_1 = 0$

Setter inn grensebetingelse 2 i.e. $x = L$ ved $y = 0$

$$\frac{R_V}{6}\ L^3 - \frac{P_1}{6} \cdot \left(L-a\right)^3 - \frac{P_2}{6} \cdot \left(L-b\right)^3 - \frac{P_3}{6} \cdot \left(L-c\right)^3 - \frac{P_4}{6} \cdot \left(L-d\right)^3 + A_1 \cdot L + 0 = 0$$

Finner at integrasjonskonstanten $A_1$ er,

$$A_1 := -\frac{1}{6 \cdot L}\left(R_V\, L^3 - P_1 \cdot (L-a)^3 - P_2 \cdot (L-b)^3 - P_3 \cdot (L-c)^3 - P_4 \cdot (L-d)^3\right)$$

$$A_1 = -160\ kN \cdot m^2$$

Bjelkens vinkel ved avstanden $x$,

$$\rho_1 := \frac{1}{2\ E \cdot I}\left(R_V\, x_1^{\ 2} - P_1 \cdot (x_1-a)^2 - P_2 \cdot (x_1-b)^2 - P_3 \cdot (x_1-c)^2 - P_4 \cdot (x_1-d)^2 + 2\ A_1\right)$$

$$\rho_1 = 0.04\ deg$$

Bjelkens nedbøyning ved $x$ er,

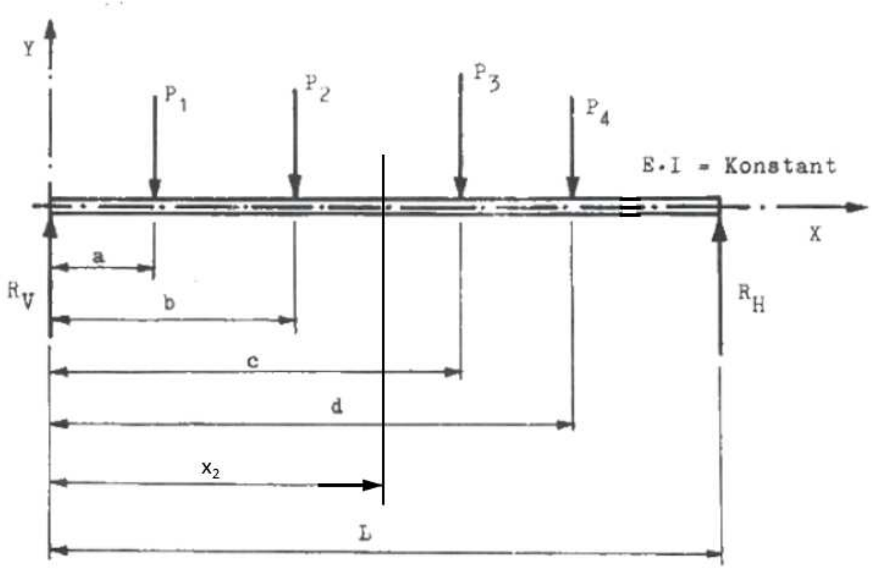
$$y_1 := \frac{1}{6\ E \cdot I}\left(R_V\, x_1^{\ 3} - P_1 \cdot (x_1-a)^3 - P_2 \cdot (x_1-b)^3 - P_3 \cdot (x_1-c)^3 - P_4 \cdot (x_1-d)^3 + 6\ A_1 \cdot x_1\right)$$

$$y_1 = -1.1\ mm$$

## Del 2: Punktet $x_2 := 5\ m$ om kun 2 av lastene

---

Uttrykket $x - a > 0$ i.e. $x_1 - b = 4.5\ m$, så $betingelse = \text{“er oppfylt”}$




*Figur E201. HEB 500 - bjelke med flere punktlaster. x om 2 laster.*

Momentet om punktet $x_2$ på bjelken,

$$M_{x2} = 0 \;\therefore\quad R_V\, x_2 - P_1\left(x_2 - a\right) - P_2\left(x_2 - b\right) - P_3\left(x_2 - c\right) - P_4\left(x_2 - d\right) = 0$$

Ser at parentesene $\left(x_2 - c\right) = -1\ m$ og $\left(x_2 - d\right) = -3\ m$ begge er negative. Basert på regelverket for Macauleys betegnelser så skal begge sløyfes.

Har da $\dfrac{M_{x2}}{EI} = \dfrac{d^2}{dx^2} y^2$ . Med uttrykket for $M_{x2}$ innsatt oppnås,

$$EI\,\frac{d^2}{dx^2} y^2 = R_V\, x_2 - P_1\left(x_2 - a\right) - P_2\left(x_2 - b\right) \qquad (1)$$

Integrerer først (1):

$$\int \left(R_V\, x_2 - P_1\left(x_2 - a\right) - P_2\left(x_2 - b\right)\right) dx$$

$$\frac{R_V}{2}\, x_2^{\,2} - \frac{P_1}{2} \cdot \left(x_2 - a\right)^2 - \frac{P_2}{2} \cdot \left(x_2 - b\right)^2 + A_2 \qquad (2)$$

Deretter (2):

$$\int \left(\frac{R_V}{2}\, x_2^{\,2} - \frac{P_1}{2} \cdot \left(x_2 - a\right)^2 - \frac{P_2}{2} \cdot \left(x_2 - b\right)^2 + A_2\right) dx$$

$$\frac{R_V}{6}\, x_2^{\,3} - \frac{P_1}{6} \cdot \left(x_2 - a\right)^3 - \frac{P_2}{6} \cdot \left(x_2 - b\right)^3 + A_2 \cdot x_2 + B_2$$

Integrasjonsbetingelsene er som følger, $x_2 = 0$ idet $y = 0$ og $x_2 = L$ idet $y = 0$.

Ser at ved $x_2 = 0$ og $y = 0$ så er $B_2 = 0$

$$\frac{R_V}{6}\, x_2^{\,3} - \frac{P_1}{6} \cdot \left(x_2 - a\right)^3 - \frac{P_2}{6} \cdot \left(x_2 - b\right)^3 + A \cdot x_2 + 0 = 0$$

$$A_2 := \frac{1}{6 \cdot L}\left(P_1 \cdot (L - a)^3 + P_2 \cdot (L - b)^3 - R_V\, L^3\right) = -171.3\ kN \cdot m^2$$

$$\rho_2 := \frac{1}{2\ E \cdot I} \cdot \left(R_V\, x_2^{\,2} - P_1 \cdot \left(x_2 - a\right)^2 - P_2 \cdot \left(x_2 - b\right)^2 + 2\ A_2\right) = -0.003\ deg$$

$$y_2 := \frac{1}{6\ E \cdot I}\left(R_V\, x_2^{\,3} - P_1 \cdot \left(x_2 - a\right)^3 - P_2 \cdot \left(x_2 - b\right)^3 + 6\ A_2 \cdot x_2\right) = -2.6\ mm$$

*Merk: Man kan alltids diskutere om ikke også massen eller vekten av selve bjelken burde vært implementert i beregningene av vinkel og nedbøyning da den har en betydelig masse pr. lengdeenhet i.e.* $q$.

Tre (3) betingelser for bruk av Macauleys betegelser:

- Parentesen skal IKKE løses opp, men benyttes i matematikken slik den står.
- Verdien av $x$ skal ALLTID være forbi siste last på bjelken.
- Hvis man søker $x$ et sted FØR siste eller nest siste last for den sakens skyld, så vil det bety at parentesen(e) er negativ(e) for $x$. I så fall skal den eller de ikke tas med i utregningen. Den eller de leddene skal sløyfes!
- Har parentesen verdien 0 for $x$ så skal den heller ikke tas med i utregningen selv om det er en logisk konsekvens $\left(P_i \cdot 0 = 0\right)$. Den eller de leddene skal sløyfes!