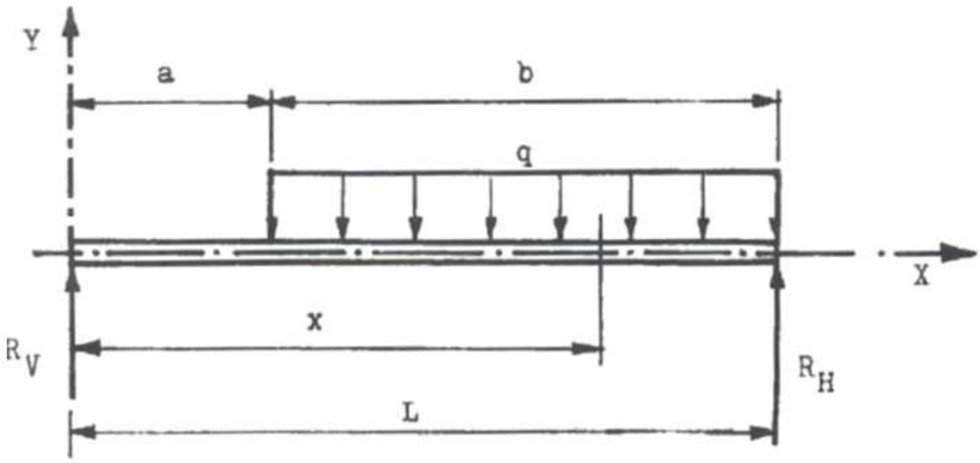
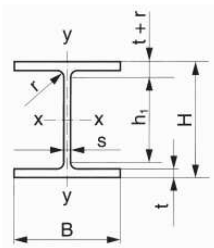
Eksempel 3: Fritt opplagret bjelke - Macaulay's betegnelser

Fritt opplagret bjelke - i begge ender, men det kunne selvfølgelig vært diletasjon i en av endene. Ved bruk av Macauleys betegnelser skal vi finne bjelkens vinkel ρ ved x og tilsvarende, nedbøyningene y_1 ved x_1 ved, del 1, jevnt fordelt last på et stykke av bjelken og del 2, med tre konsentrerte laster samt med vekten av selve bjelken.



Figur E301. HEB 500 - bjelke med jevnt fordelt last et stykke av bjelken.

Følgende data er gitt om bjelken samt om belastning:



Bjelkens total lengde: $L := 10\ m$

Bjelkens arealtreghets moment: $I := 107200\ cm^4$, om x-aksen

Elastisitetsmodul / Young modulus: $E := 2.05 \cdot 10^5\ MPa$

Avstand 1: $a := 3\ m$ Belastning (jevn last): $m_H := 187\ \frac{kg}{m}$

Avstand 2: $b := L - a = 7\ m$ => $q_H := m_H \cdot g = 1.8\ \frac{kN}{m}$

Finner først opplagerkreftene:

$$M_A = 0\ \therefore\ -R_H L + (q_H \cdot b) \cdot \left(\frac{b}{2} + a\right) = 0 \quad => \quad R_H := \frac{q_H \cdot b^2}{2\ L} \left(1 + \frac{2\ a}{b}\right) = 8.3\ kN$$

$$M_B = 0\ \therefore\ R_V L - (q_H \cdot b) \cdot \frac{b}{2} = 0 \quad => \quad R_V := \frac{q_H \cdot b^2}{2\ L} = 4.5\ kN$$

Del 1: Jevn last - om punkt x_1

Ønsker å finne vinkel og nedbøyning i punktet $x_1 := 7\ m$.

Videre finnes momentet om punktet x_1 på bjelken,

$$M_{x1} = 0 \therefore \quad R_V\ x_1 - q_H (x_1 - a) \cdot \frac{(x_1 - a)}{2} = R_V\ x_1 - \frac{(x_1 - a)^2}{2} = 0$$

En vet at $\frac{M_{x1}}{EI} = \frac{d^2}{dx^2} y^2$. Med uttrykket for M_{x1} innsatt oppnås,

$$EI \frac{d^2}{dx^2} y^2 = R_V\ x_1 - \frac{q_H (x_1 - a)^2}{2} \qquad (1)$$

Integrerer først (1):

$$\int \left(R_V\ x_1 - \frac{(x_1 - a)^2}{2} \right) dx = \frac{R_V}{2}\ x_1^2 - \frac{q_H}{6}\ (x_1 - a)^3 + A_1 \qquad (2)$$

Deretter (2):

$$\int \left(\frac{R_V}{2}\ x_1^2 - \frac{1}{6}\ (x_1 - a)^3 + A_1 \right) dx = \frac{R_V}{6}\ x_1^3 - \frac{q_H}{24}\ (x_1 - a)^4 + A_1 \cdot x_1 + B \qquad (3)$$

Integrasjonsbetingelsene er som følger, $x_1 = 0$ idet $y = 0$ og $x_1 = L$ idet $y = 0$.

Ser at ved $x_1 = 0$ og $y = 0$ så er $B_1 = 0$

Grensebetingelse 2 i.e. $x = L$ ved $y = 0$ og gir $\frac{R_V}{6}\ L^3 - \frac{q_H}{24}\ (L - a)^4 + A_1 \cdot L + 0 = 0$

Finner at integrasjonskonstanten A_1 er $A_1 := \frac{1}{6\ L} \left(\frac{q_H}{4}\ (L - a)^4 - R_V\ L^3 \right) = -56.5\ kN \cdot m^2$

Vinkel ved avstand x_1 er $\rho_1 := \frac{1}{6\ E \cdot I} \left(3\ R_V\ x_1^2 - q_H\ (x_1 - a)^3 + 6\ A_1 \right) = 0.0089\ deg$

Nedbøyning ved x_1 er $y_1 := \frac{1}{6\ E \cdot I} \left(R_V\ x_1^3 - \frac{q_H}{4}\ (x_1 - a)^4 + 6\ A_1 \cdot x_1 \right) = -0.72\ mm$

Del 2: Jevn last og punktlaster - om punkt x_2

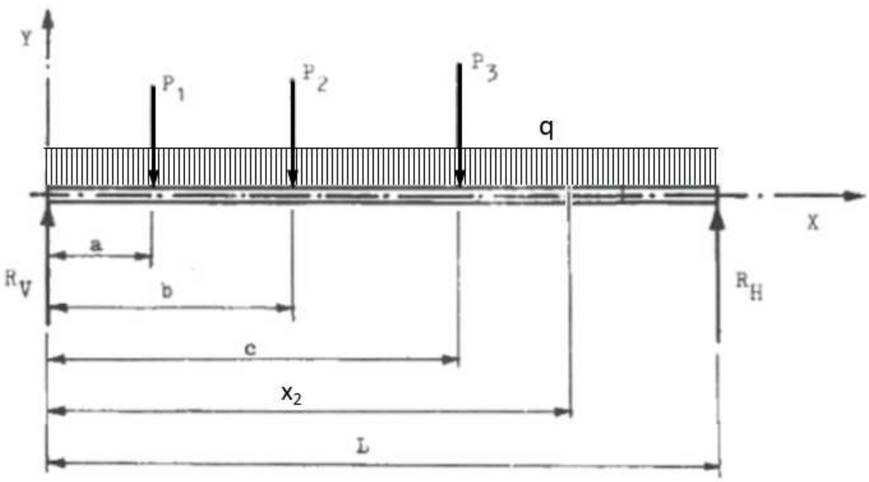
Ønsker å finne vinkel og nedbøyning i punktet $x_2 := 8\ m$.

Avstand 1: $a := 2.5\ m$ Belastning (punktlast): $P_1 := 5 \cdot kN$

Avstand 2: $b := 5\ m$ Belastning (punktlast): $P_2 := 12.5 \cdot kN$

Avstand 3: $c := 7.5\ m$ Belastning (punktlast): $P_3 := 12.5 \cdot kN$

Belastning (jevn last): $m_H := 187\ \frac{kg}{m}$ => $q_H := m_H \cdot g = 1.8\ \frac{kN}{m}$



Figur E302. HEB 500 - bjelke med jevnt fordelt last og tre konsentrerte laster.

Finner først opplagerkreftene:

$$M_A = 0 \therefore\ -R_H L + (q_H \cdot L) \cdot \frac{L}{2} + P_1 \cdot a + P_2 \cdot b + P_3 \cdot c = 0$$

$$=> \quad R_H := \frac{q_H \cdot L}{2} + \frac{(P_1 \cdot a + P_2 \cdot b + P_3 \cdot c)}{L} = 26\ kN$$

$$M_B = 0 \therefore\ R_V L - \left(\frac{q_H \cdot L^2}{2}\right) - (P_1 \cdot (L-a) + P_2 \cdot (L-b) + P_3 \cdot (L-c)) = 0$$

$$=> \quad R_V := \left(\frac{q_H \cdot L}{2}\right) + \frac{(P_1 \cdot (L-a) + P_2 \cdot (L-b) + P_3 \cdot (L-c))}{L} = 22.3\ kN$$

Videre finnes momentet om punktet x_2 på bjelken,

$$M_{x2} = 0 \;\therefore\quad R_V\, x_2 - \left(q_H \cdot (L - x_2) \cdot \frac{(L - x_2)}{2}\right) - P_1 (L - a) - P_2 (L - b) - P_3 (L - c) = 0$$

En vet at $\frac{M_{x2}}{EI} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y^2$. Med uttrykket for M_{x2} innsatt oppnås,

$$EI\, \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y^2 = R_V\, x_2 - \left(q_H \cdot \frac{(L - x_2)^2}{2}\right) - P_1 (L - a) - P_2 (L - b) - P_3 (L - c) \tag{1}$$

Integrerer først (1):

$$\int \left(R_V\, x_2 - \left(q_H \cdot \frac{(L - x_2)^2}{2}\right) - P_1 (x_2 - a) - P_2 (x_2 - b) - P_3 (x_2 - c)\right) \mathrm{d}x \tag{2}$$

$$\frac{R_V\, {x_2}^2}{2} - \left(q_H \cdot \frac{(L - x_2)^3}{6}\right) - \frac{P_1 (x_2 - a)^2}{3} - \frac{P_2 (x_2 - b)^2}{3} - \frac{P_3 (x_2 - c)^2}{3} + A_2$$

$$\frac{1}{6} \left(3\, R_V\, {x_2}^2 - \left(q_H \cdot (L - x_2)^3\right) - 2\, P_1 (x_2 - a)^2 - 2\, P_2 (x_2 - b)^2 - 2\, P_3 (x_2 - c)^2 + 6\, A_2\right)$$

Deretter (2):

$$\int \left(\frac{R_V\, {x_2}^2}{2} - \left(q_H \cdot \frac{(L - x_2)^3}{6}\right) - \frac{P_1 (x_2 - a)^2}{3} - \frac{P_2 (x_2 - b)^2}{3} - \frac{P_3 (x_3 - c)^2}{3} + A_2\right) \mathrm{d}x \tag{3}$$

$$\frac{R_V\, {x_2}^2}{2} - \left(q_H \cdot \frac{(L - x_2)^3}{6}\right) - \frac{P_1 (x_2 - a)^2}{3} - \frac{P_2 (x_2 - b)^2}{3} - \frac{P_3 (x_2 - c)^2}{3} + A_2 \cdot x_2 + B$$

$$\frac{R_V\, {x_2}^3}{6} - \left(q_H \cdot \frac{(L - x_2)^4}{24}\right) - \frac{P_1 (x_2 - a)^3}{9} - \frac{P_2 (x_2 - b)^3}{9} - \frac{P_3 (x_2 - c)^3}{9} + A_2 \cdot x_2 + B$$

$$\frac{1}{6} \left(R_V\, {x_2}^3 - \left(q_H \cdot \frac{(L - x_2)^4}{4}\right) - \frac{2}{3} \left(P_1 (x_2 - a)^3 - P_2 (x_2 - b)^3 - P_3 (x_2 - c)^3 - 9\, A_2 \cdot x_2\right) + 6\, B\right)$$

Integrasjonsbetingelsene er som følger, $x_1 = 0$ idet $y = 0$ og $x_1 = L$ idet $y = 0$.

Ser at ved $x_1 = 0$ og $y = 0$ så er $B_1 = 0$

Grensebetingelse 2 i.e. $x = L$ ved $y = 0$ gir

$$\frac{1}{6}\left(R_V\ L^3 - \left(q_H \cdot \frac{(L-L)^4}{4}\right) - P_1 (L-a)^3 - P_2 (L-b)^3 - P_3 (L-c)^3 + 6\ A_2 \cdot L\right) = 0$$

Finner at integrasjonskonstanten A_1 er

$$A_2 := \frac{1}{6 \cdot L}\left(P_1 \cdot (L-a)^3 + P_2 \cdot (L-b)^3 + P_3 \cdot (L-c)^3 - R_V\ L^3\right) = -307.1\ kN \cdot m^2$$

Vinkel ρ_2 ved avstand x_2 er

$$\rho_2 := \frac{\left(3\ R_V\ x_2{}^2 - \left(q_H \cdot (L-x_2)^3\right) - 2\left(P_1 \cdot (x_2-a)^2 + P_2 \cdot (x_2-b)^2 + P_3 \cdot (x_2-c)^2 - 3\ A_2\right)\right)}{6 \cdot E \cdot I}$$

$\rho_2 = 0.082\ deg$

Nedbøyning y_2 ved x_2 er

$$y_2 := \frac{\left(R_V\ x_2{}^3 - \left(q_H \cdot \frac{(L-x_2)^4}{4}\right) - \frac{2}{3}\left(P_1 \cdot (x_2-a)^3 + P_2 \cdot (x_2-b)^3 + P_3 \cdot (x_2-c)^3 - 9\ A_2 \cdot x_2\right)\right)}{6 \cdot E \cdot I}$$

$y_2 = -3.1\ mm$

Tre (3) betingelser for bruk av Macauleys betegelser:

- Parentesen skal IKKE løses opp, men benyttes i matematikken slik den står.
- Verdien av x skal ALLTID være forbi siste last på bjelken.
- Hvis man søker x et sted FØR siste eller nest siste last for den sakens skyld, så vil det bety at parentesen(e) er negativ(e) for x. I så fall skal den eller de ikke tas med i utregningen. Den eller de leddene skal sløyfes!
- Har parentesen verdien 0 for x så skal den heller ikke tas med i utregningen selv om det er en logisk konsekvens $(P_i \cdot 0 = 0)$. Den eller de leddene skal sløyfes!