Eksempel 2: Slag med en golfball - uten luftmotstand

Et slag med en golfball er et utmerket eksempel på et skrått kast. Vi har at en golfball slås fra nivå 0 (bakken) med et 7-er jern og lander en strekning $s(t)$ lenger bort, fortsatt på det samme nivå 0.

Alle utregninger ser bort i fra "drag" i.e. luftmotstand. Luftmotstand kan regnes på mange måtes og det er ikke tvil om at en golfball påvirkes kraftig av luftmotstanden under sin flukt mot landingsstedet. Man kan alltids argumentere for at man kan ta med luftmotstand i y-retning og ikke i x-retning fordi førstnevnte teller 90 % og baserer seg "terminal velocity" i y-retning og er helt grei å benytte selv om den ikke er fullt ut korrekt. Eller benytte en kan implementere et uttrykk hvor en eksponensialfunksjon implementeres og begge retninger (x og y) hensyntas. Dette får forfatter heller komme tilbake til.

I tillegg til luftmotstand er det også sett bort i fra spinn (eng. spin) i ballen under ballflukten da spinn også er en "vanskelig" parameter å håndtere i denne forbindelse. Spin rate for en ball slått med et 7-er jern er ca. $7000\ rpm$ og besørger at ballen løftes mer.

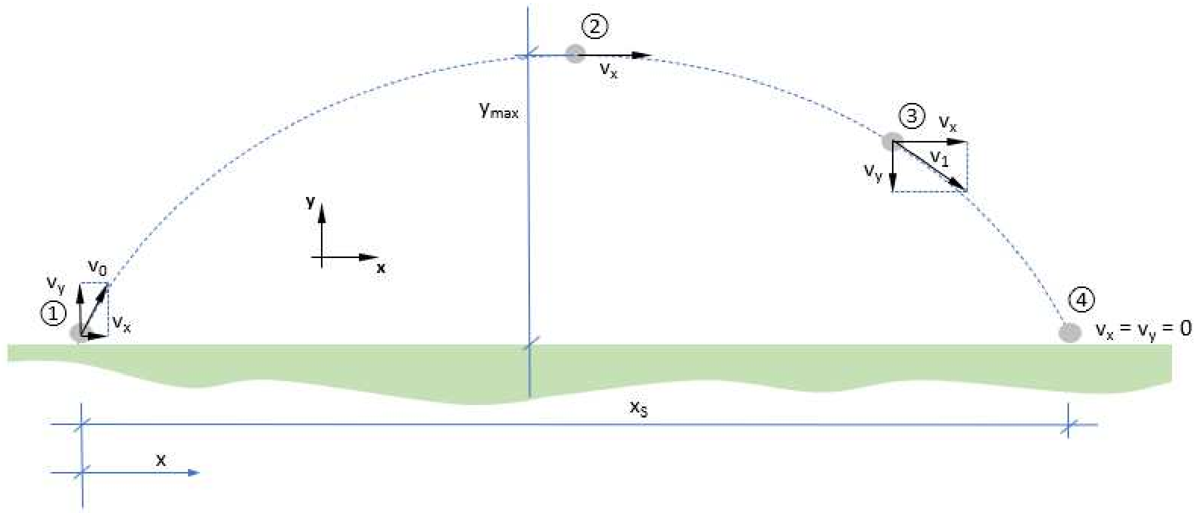
Flere innendørs golfsimulatorprogrammer (eks. Trackman) tar begge deler, men i de programmene mener forfatter at datene er diskretiserte og basert på erfaringsdata.

Vi skal finne (uten luftmotstand og spinn):

1. Hvor langt går ballen, s (landingsstedet uten rull), uten luftmotstand?
2. Hvordan ser ballbanen (trajektoren) ut, uten luftmotstand?
3. Hvor høyt er ballen på det høyeste i ballbanen, , uten luftmotstand?
4. Hastigheten til golfballen etter $t = 2\ sec$?
5. Hvor lenge var ballen i lufta?

1. Hvor langt går ballen, s (landingsstedet uten rull), uten luftmotstand?

Idet golfballen er slått ut i bane,



Figur E101. Golfballens bane.

Følgende parametere gjelder,

Høyden ballen starter i fra: $y_0 := 0\ m$

Køllehastigheten er: $v_k := 90\ mph = 40.2\ \frac{m}{s}$

Smashfaktoren er: $f_s := 1.33$ (forhold mellom køllehastighet og ballhastighet)

Utgangshastigheten er da: $v_b := v_k \cdot f_s = 119.7\ mph$ uttrykt ved $v_0 := v_b = 53.5\ \frac{m}{s}$

Utgangsvinkel er: $\phi := 16\ deg$

Dekomponener ballhastigheten v_0 i x og y-retning.

$$v_{x0} := v_0 \cdot \cos(\phi) \quad \text{og} \quad v_{y0} := v_0 \cdot \sin(\phi)$$

Under flukten så:

- virker det ingen krefter på ballen i x-retning
- er det kun gravitasjonen virker på ballen i y-retning

Likningene kan benyttes både i x- og y-retning. Setter $s_y = y$ og $s_x = x$. Får da for x-retningen: $x = v_x \cdot t$. Løser denne mhp. t og får $t = \frac{s_x}{v_x}$ (a)

For y-retningen fås $y = s_{y0} + v_{y0} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ (b), der $s_{y0} = 0$ og gravitasjonen g er neg.

Setter (a) inn i (b) og får

$$y(x) = v_{y0}\left(\frac{x}{v_{x0}}\right) - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_{x0}}\right)^2 = \left(\frac{sin(\phi)}{cos(\phi)}\right) x - \left(\frac{g}{2\ {v_0}^2 \cdot cos(\phi)^2}\right) \cdot x^2 \quad \text{(c)}$$

Som det fremgår er (c) en andregradslikning som uttrykker en parabel som angitt, for ballens bane. For å finne lengden må vi finne røttene til likning (c). Forfatter jukser litt fordi røtter finnes automatisk vba. "polyroots" i PTC Prime vba. matriser, men dette kan utføres vba. "kvadratrotsetningen" som vi lærte på skolen.

$$y(x) := \left(\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}\right) x - \left(\frac{g}{2\ {v_0}^2 \cdot \cos(\phi)^2}\right) \cdot x^2 \quad \text{satt i matrise,} \quad l_{2g} := \begin{bmatrix} 0\ m \\ \dfrac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} \\ -\left(\dfrac{g}{2\ {v_0}^2 \cdot \cos(\phi)^2}\right) \end{bmatrix}$$

Røttene er $r_{oots} := \text{polyroots}\left(l_{2g}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 154.7 \end{bmatrix}$ m, men det fremgår klart at du ikke slår

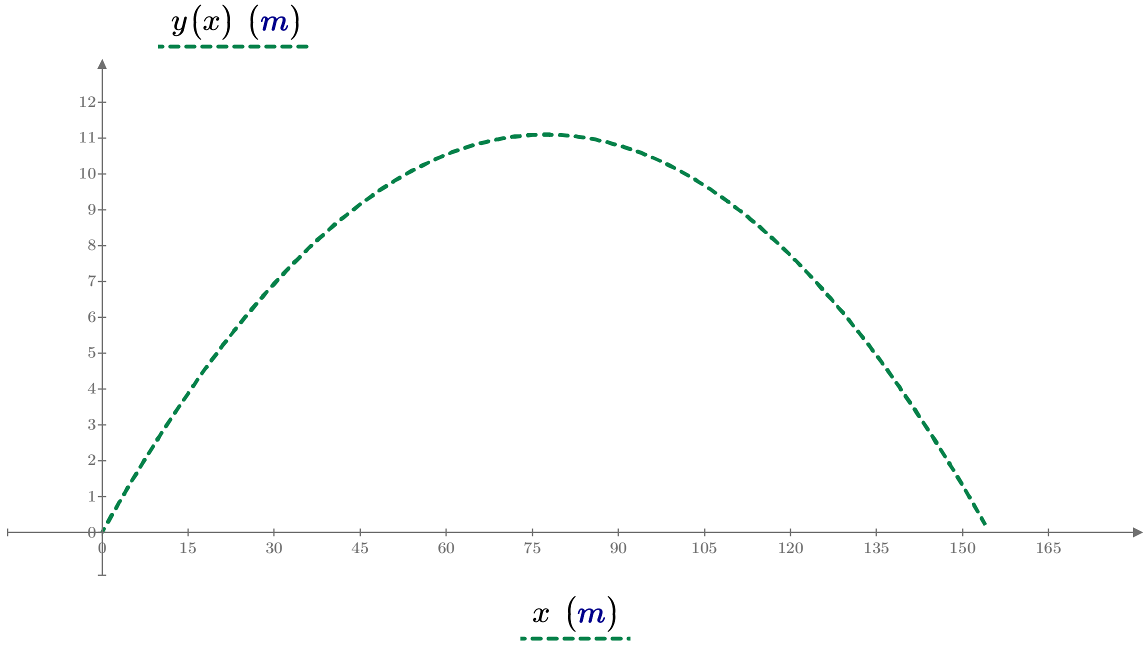
$r_{oots_{1,0}} = 154.7\ m$ med et 7-jern i virkeligheten det ballen har luftmotstand.

Merk: I virkeligheten slår en PGA spiller ca. $157\ m$ *med et 7-er jern. Mao. luftmotstand har litt å si for resultatet, men vel så mye valgte inngangs-parametere.*

2. Hvordan ser ballbanen (trajektoren) ut, uten luftmotstand?

Vi lar x løpe i fra $x := 0\ m, 1\ m .. r_{oots_{1,0}}$

Parablen uttrykkes ved $y(x) := \left(\dfrac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}\right) x - \left(\dfrac{g}{2\ {v_0}^2 \cdot \cos(\phi)^2}\right) \cdot x^2$



3. Hvor høyt er ballen på det høyeste (apex) i ballbanen, uten luftmotstand?

For å finne den største høyden (apex) må vi finne ut ved hvilken verdi av x som ballbanen er flat. Dvs. hvor den deriverte av likningen $y(x) = 0$

Finner den deriverte av $y(x)$ som er $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} - \dfrac{g \cdot x}{{v_0}^2 \cdot \cos(\phi)^2}$ (d). Likningen (d)

settes så lik 0 i.e. $\dfrac{dy}{dx} = 0 = \dfrac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} - \dfrac{g \cdot x}{{v_0}^2 \cdot \cos(\phi)^2}$ (e).

Igjen, for å finne høyden må vi først løse likning (e) for å finne hvor på x-aksen. Likning (e) løses automatisk ved "polyroots" i PTC Prime vba. matriser.

$$p(x) := \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} - \frac{g \cdot x}{v_0^{\ 2} \cdot \cos(\phi)^2} \quad \text{satt i matrise,} \quad l_{apex} := \begin{bmatrix} \dfrac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} \\ -\dfrac{g}{v_0^{\ 2} \cdot \cos(\phi)^2} \end{bmatrix}$$

Avstanden $x_{apex} := \text{polyroots}\left(l_{apex}\right) = 77.4\ m$. Setter x_{apex} inn i likning (c). Vi får,

$$y := \left(\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}\right) x_{apex} - \left(\frac{g}{2\ v_0^{\ 2} \cdot \cos(\phi)^2}\right) \cdot x_{apex}^{\ 2} = 11.1\ m$$

Merk: Som nok er ganske mye for lavt i forhold til PGA-snitt. Implementering av ballens spinn hadde endret resultatet betraklig.

<u>4. Hastigheten til golfballen etter $t := 2\ sec$?</u>

Likningen $x(t) := v_0 \cdot \cos(\Phi) \cdot t$ beskriver hvor ballen befinner seg i x-retning mhp. tiden og likningen $y(t) := v_0 \cdot \sin(\phi) \cdot t - \frac{1}{2}\ g \cdot t^2$ beskriver hvor ballen befinner seg i y-retning mhp. tiden.

Vet at hastightene er den deriverte av posisjonen mhp. tiden t. Vi deriverer hvert av uttrykkene over som da blir hastighetskoordunatene til ballen. Har at,

$$v_{xt} = \frac{dx}{dt} = v_0 \cdot cos(\phi) \quad \text{og} \quad v_{yt} = \frac{dy}{dt} = v_0 \cdot sin(\phi) - g \cdot t$$

Benytter Pytagoras (*Fun fact: Pytagoras er oppskrytt fordi Babilonerne visste om dette teoremet anslagsvis 3000 før Pytagoras ble født*) og får,

$$v := \sqrt{\left(v_0 \cdot \cos(\phi)\right)^2 + \left(v_0 \cdot \sin(\phi) - g \cdot t\right)^2} = 51.7\ \frac{m}{s} \qquad \text{(f)}$$

<u>5. Hvor lenge var ballen i lufta?</u>

Det klarer seg i dette tilfellet å finne tiden kun med likningen i y-retning i.e.,

$$y(t) := v_0 \cdot \sin(\phi) \cdot t - \frac{1}{2}\ g \cdot t^2 \qquad \text{(b)}$$

Likningen må settes lik null idet vi må finne dens røtter. Den ene roten kjenner vi - den er 0. Den andre er det ballen etter en viss tid t (den vi skal finne) "slår" igjennom x-aksen (bakken) idet den lander.

Har da at,

$$v_0 \cdot sin(\phi) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 0$$

Likning (e) løses automatisk ved "polyroots" i PTC Prime vba. matriser.

Har at likningen (b) satt i matrise $t_t := \begin{bmatrix} 0\ m \\ v_0 \cdot \sin(\phi) \\ -\frac{1}{2}\ g \end{bmatrix}$ gir $t_{time} := \text{polyroots}(t_t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.01 \end{bmatrix} s$

Ballen var i lufta $t_{time_{1,0}} = 3.01\ s$ før den landet.