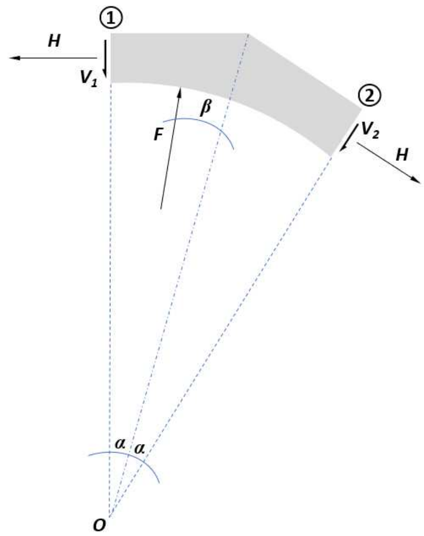
Teori + Eksempel: Beregning av maksimal kapasitet for løfteøre

Finn den største kraften F som gir full flyt i snitt ① og ② etter von Mises flytkriterium.



Figur 1. Bit av et løfteøre.

Forutsetninger:

1. Neglisjerer bøyemomentene i snitt ① og ②.

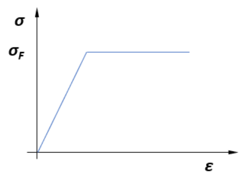
For ordens skyld, momentene i snitt ① og ② er ulik 0, men de ansees som så små at de kan neglisjeres.

2. $\Sigma M = 0 \;\; => \; H_1 = H_2 = H$

3. Kraften F går i gjennom O.

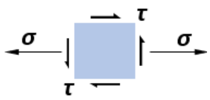
Materialegeskaper:

Tillatt spenning: $\sigma = \dfrac{\sigma_F}{\eta}$ (1)



Figur 2. Materialflyt

von Mises flytkriterium: $\sigma_F{}^2 = \sigma^2 + 3\,\tau^2$ (2)



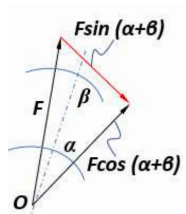
Denne beregningen vil videre basere seg på kraftbalansen mot F i.e. den deriverte av $F = F_{max}$. Det virkelige bildet av kraftens påvirkning er nok bedre da F ikke er en punktlast, men mere en jevnere belastning (tar ikke stilling til dette her).

Kraftbalansen:

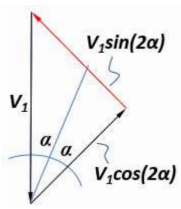
Sier at: $\sigma = \dfrac{H}{A}$ (3), der $A = bh$

og $\tau_1 = \dfrac{V_1}{A}$ (4)

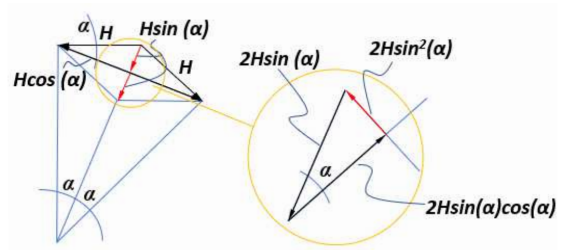
Så, hvilke krefter holder likevekt med hverandre ...



$F \cdot sin(\alpha + \beta)$



$V_1 \cdot sin(2\,\alpha)$



$2\,H \cdot sin^2\,(\alpha)$

$$\Sigma k_{LV2} = 0 \;\therefore\; F \cdot sin(\alpha+\beta) = V_1 \cdot sin(2\;\alpha) + 2\;H \cdot sin^2\;(\alpha) \qquad (5)$$

Ut i fra dette kan vi finne kraften H: $2\;H \cdot sin^2\;(\alpha) = F \cdot sin(\alpha+\beta) - V_1 \cdot sin(2\;\alpha)$

$$H = \frac{F \cdot sin(\alpha+\beta) - V_1 \cdot sin(2\;\alpha)}{2\;sin^2\;(\alpha)} \qquad (6)$$

Setter (6) inn i (2) og får,

$$\sigma_F{}^2 = \left(\frac{H}{A}\right)^2 + 3\left(\frac{V_1}{A}\right)^2 = \frac{H^2}{A^2} + 3\;\frac{V_1{}^2}{A^2} \qquad (7)$$

$$\sigma_F{}^2 = \left(\frac{F \cdot sin(\alpha+\beta) - V_1 \cdot sin(2\;\alpha)}{2\;sin^2\;(\alpha)}\right)^2 \cdot \frac{1}{A^2} + \frac{3\;V_1{}^2}{A^2}$$

$$\sigma_F{}^2 - 3\;V_1{}^2\;\left(\frac{1}{A^2}\right) = \left(\frac{F \cdot sin(\alpha+\beta) - V_1 \cdot sin(2\;\alpha)}{2\;sin^2\;(\alpha)}\right)^2 \cdot \frac{1}{A^2}$$

$$\sigma_F{}^2 - 3\;V_1{}^2\;\left(\frac{1}{A^2}\right) = \frac{\left(F \cdot sin(\alpha+\beta) - V_1 \cdot sin(2\;\alpha)\right)^2}{\left(2\;sin^2\;(\alpha)\right)^2 \cdot A^2}$$

Multipliserer med $\left(2\;sin^2\;(\alpha)\right)^2 \cdot A^2$ på begge sider og får,

$$\left(F \cdot sin(\alpha+\beta) - V_1 \cdot sin(2\;\alpha)\right)^2 = \left(\sigma_F{}^2 - 3\;V_1{}^2\;\left(\frac{1}{A^2}\right)\right) \cdot \left(2\;sin^2\;(\alpha)\right)^2 \cdot A^2$$

$$F \cdot sin(\alpha+\beta) - V_1 \cdot sin(2\;\alpha) = \sqrt{\left(\sigma_F{}^2 - 3\;V_1{}^2\;\left(\frac{1}{A^2}\right)\right) \cdot \left(2\;sin^2\;(\alpha)\right)^2 \cdot A^2}$$

$$F \cdot sin(\alpha+\beta) - V_1 \cdot sin(2\;\alpha) = \sqrt{\left(A^2\;\sigma_F{}^2 - 3\;V_1{}^2\right) \cdot \left(2\;sin^2\;(\alpha)\right)^2}$$

$$F \cdot sin(\alpha+\beta) - V_1 \cdot sin(2\;\alpha) = 2\;sin^2\;(\alpha) \cdot \sqrt{\left(A^2\;\sigma_F{}^2 - 3\;V_1{}^2\right)}$$

$$F \cdot sin(\alpha+\beta) = 2\;sin^2\;(\alpha) \cdot \sqrt{\left(A^2\;\sigma_F{}^2 - 3\;V_1{}^2\right)} + V_1 \cdot sin(2\;\alpha)$$

$$F = \frac{2\;sin^2\;(\alpha) \cdot \sqrt{\left(A^2\;\sigma_F{}^2 - 3\;V_1{}^2\right)} + V_1 \cdot sin(2\;\alpha)}{sin(\alpha+\beta)} \qquad (8)$$

For å finne den maksimale størrelsen på F deriverer vi F mhp. V_1 i.e. $\frac{dF}{dV_1}$ og setter denne lik 0, i.e. $F_{max} = 0$

$$\frac{dF}{dV_1} = \frac{\sin(2\cdot\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)} - \frac{6\cdot\alpha\cdot V_1\cdot\sin^2}{\sqrt{\sigma_F{}^2\cdot A^2 - 3\cdot V_1{}^2}\cdot\sin(\alpha+\beta)} \tag{9}$$

eller litt penere ...

$$\frac{dF}{dV_1} = \frac{2\cdot sin(\alpha)}{\sqrt{3}\cdot sin(\alpha+\beta)}\cdot\sqrt{1+2\cdot sin(\alpha)^2}\cdot A\cdot\sigma_F$$

Setter den deriverte lik 0 for å finne maksimal skjær- og normalkraft,

$$\frac{dF}{dV_1} = 0 \;=>\; \frac{2\cdot sin(\alpha)}{\sqrt{3}\cdot sin(\alpha+\beta)}\cdot\sqrt{1+2\cdot sin(\alpha)^2}\cdot A\cdot\sigma_F = 0 \tag{10}$$

Den maksimale lasten F_{max} idet det flyter er da,

$$F_{max} = \frac{2\cdot sin(\alpha)}{sin(\alpha+\beta)}\cdot\left(V_1\cdot cos(\alpha) + sin(\alpha)\;\sqrt{A^2\cdot\sigma_F{}^2 - 3\cdot V_1{}^2}\right) \tag{11}$$

Med den maksimale skjærkraften,

$$V_1 = \frac{cos(\alpha)\cdot A\cdot\sigma_F}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+2\;sin(\alpha)^2}} \tag{12}$$

og men maksimale normalkraften,

$$H = \frac{\sqrt{3}\cdot sin(\alpha)\cdot A\cdot\sigma_F}{\sqrt{1+2\;sin(\alpha)^2}} \tag{13}$$

Den maksimale spenningen i fra den maksimale skjærkraften,

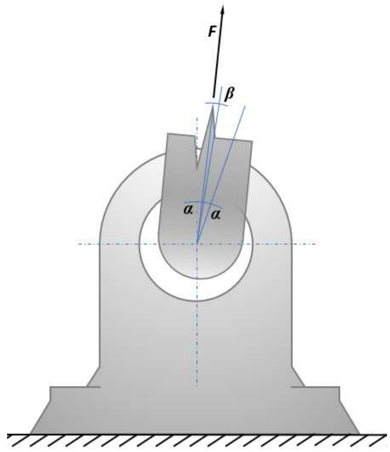
$$\sigma_{max} = \frac{V_1}{A} = \frac{cos(\alpha)\cdot\sigma_F}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+2\;sin(\alpha)^2}} \tag{14}$$

Den maksimale spenningen i fra den maksimale normalkraften,

$$\tau_{max} = \frac{\sqrt{3}\cdot sin(\alpha)\cdot\sigma_F}{\sqrt{1+2\;sin(\alpha)^2}} \tag{15}$$

Eksempel: Beregning av <u>maksimal</u> kapasitet for et løfteøre

Benytter teorien over for å dimensjonere et løfteøre.



Figur 3. Et løfteøre.

Materialets flytespenning: $\sigma_F := 235\ MPa$

Vinkler: $\alpha := 15\ deg$ $\quad \beta := 5\ deg$

Dimensjoner: $b := 20\ mm$ $\quad h := 40\ mm$

Sikkerhetsfaktor velges: $\eta := 3$

Det belastede tverrsnittet er da: $A := b \cdot h = 800\ mm^2$

Den maksimale lasten tverrsnittet kan holde opp til flyt:

$$F_{max} := \frac{2 \cdot \sin(\alpha)}{\sqrt{3} \cdot \sin(\alpha + \beta)} \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \sin(\alpha)^2} \cdot A \cdot \sigma_F = 174.9\ kN$$

Ved F_{max} er skjærkraften V_1 og normalkraften H lik,

$$V_1 := \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{1 + 2\ \sin(\alpha)^2}} \cdot A \cdot \sigma_F = 98.5\ kN$$

$$H := \frac{\sqrt{3} \cdot \sin(\alpha)}{\sqrt{1 + 2\ \sin(\alpha)^2}} \cdot A \cdot \sigma_F = 79.1\ kN$$

Spenninger: $\sigma_{max} = \frac{H}{A}$ => $\sigma_{max} := \frac{\sqrt{3} \cdot \sin(\alpha) \cdot \sigma_F}{\sqrt{1 + 2\ \sin(\alpha)^2}} = 98.9\ MPa$

$\tau_{max} = \frac{V_i}{A}$ => $\tau_{max} := \frac{\cos(\alpha) \cdot \sigma_F}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{1 + 2\ \sin(\alpha)^2}} = 123.1\ MPa$

Og siden von Mises flytkriterium utnytter materialet maksimalt så er den jamnførende spenningen (von Mises) lik,

$$\sigma_{vM} := \sqrt{\sigma_{max}^2 + 3\ \tau_{max}^2} = 235\ MPa \qquad \text{(Q.e.d.)}$$

Så til spørsmålet: Er løfteøret dimensjonert godt nok, i.e. er det OK eller ikke OK?

Den reelle lasten: $F_{Real} := 50\ kN$ (Denne må da være minst η mindre enn F_{max})

Kontroll: $\eta_{sjekk} := \frac{F_{max}}{F_{Real}} = 3.5$ dvs: $\eta_{sjekk} > \eta$

$Løfteøret = \text{“OK”}$